

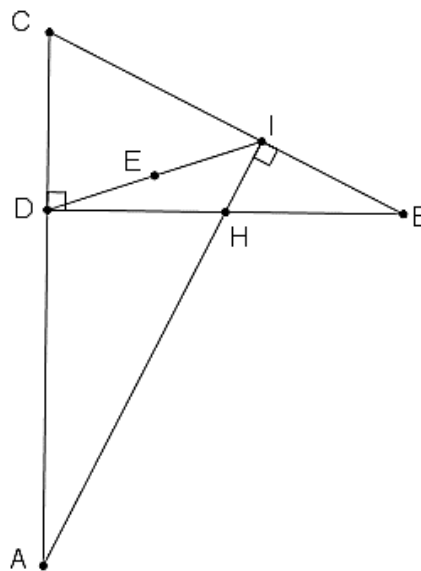
REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2018	<i>Session principale</i>	
	Epreuve : Mathématiques	Section : <i>Mathématiques</i>
	Durée : 4h	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">◆</div>

**Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.**

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre,

- DBC est un triangle rectangle en D tel que $\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ et $DB = 2DC$;
- le point H est le milieu du segment DB ;
- le point I est le projeté orthogonal du point H sur la droite BC ;
- le point E est le milieu du segment ID ;
- les droites IH et CD se coupent au point A.



1) Soit R la rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Calculer $\tan \angle CBD$. En déduire que $\frac{IH}{IB} = \frac{1}{2}$.

b) Montrer alors que $R(I) = E$.

2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2. On pose $f = h \circ R$.

a) Déterminer $f(H)$.

b) Montrer que $f(I) = I$.

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

d) Montrer que $f(C) = A$.

3) a) La droite CH coupe la droite AB en un point F.

Justifier que les points B, I, H et F sont sur le cercle de diamètre BH.

En déduire que $\left(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IF}\right) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

b) Montrer alors que l'image par f de la droite ID est la droite IF.

c) La droite ID coupe les droites CF et AB respectivement en J et Ω . Montrer que $f(J) = F$.

d) Montrer que $f(F) = \Omega$.

4) Montrer que le triangle $CA\Omega$ est rectangle.

Exercice 2 (3 points)

Soit θ un réel non nul.

Dans la **figure 1** de l'**annexe** jointe,

- O, \vec{u}, \vec{v} est un repère orthonormé direct ;
- \mathcal{C} est le cercle de centre O et de rayon 1 ;
- E est le point de \mathcal{C} tel que $\left(\vec{u}, \vec{OE} \right) \equiv \theta \pmod{2\pi}$;
- F et G sont les points d'affixes, respectives, -1 et $1+\sqrt{2}$;
- Γ est le demi-cercle de diamètre FG ;
- D est le point d'intersection de Γ et l'axe O, \vec{v} .

1) a) Vérifier que $OD^2 = 1 + \sqrt{2}$.

b) Soit A le point d'affixe $z_A = i \sqrt{1+\sqrt{2}} e^{i\theta}$. Vérifier que $z_A = OD e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$. Construire alors le point A .

2) On considère, dans \mathbb{C} , l'équation $E : z^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}} e^{i\theta} z + e^{2i\theta} = 0$.

a) Vérifier que z_A est une solution de l'équation E .

b) On désigne par B le point d'affixe z_B , où z_B est la deuxième solution de E .

Déterminer z_B .

3) a) Montrer que les points O, A et B sont alignés.

b) Placer le point C d'affixe $z_C = OD e^{i\theta}$.

c) Montrer que $\frac{\text{Aff } \vec{AC}}{\text{Aff } \vec{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$.

En déduire que le triangle ABC est isocèle et que $\left(\vec{AB}, \vec{AC} \right) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

d) Construire alors le point B .

Exercice 3 (7 points)

A) On considère la fonction f définie sur $0, +\infty$ par $\begin{cases} f(x) = x \ln x & \text{si } x > 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé O, \vec{i}, \vec{j} .

1) a) Vérifier que f est continue à droite en 0 .

b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement.

c) Dresser le tableau de variation de f .

2) Dans la **Figure 2** de l'**annexe** jointe, on a tracé dans un repère orthonormé O, \vec{i}, \vec{j} , la courbe Γ

de la fonction $x \mapsto e^x$ et les droites Δ et Δ' d'équations respectives $y=x$ et $y=-x$.

a) Construire les points A et B de (C_f) d'abscisses respectives e et $\frac{1}{e}$.

b) Déterminer la position relative de (C_f) et Δ puis la position relative de (C_f) et Δ' .

c) Tracer la courbe (C_f) .

3) Soit S la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites Δ et Δ' .

Montrer que l'aire de la partie S est égale à $\frac{1}{4} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$.

B) Soit n un entier naturel.

On pose $u_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^n e^t dt$ et $v_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^n e^t f t dt$.

1) a) Montrer que $u_n > 0$.

b) Montrer que $0 < u_n \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

c) Montrer que $u_{n+1} = e - \frac{e^e}{e^{n+1}} - (n+1) u_n$.

d) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) u_n = e$.

2) a) Montrer que $-\frac{u_n}{e} \leq v_n \leq 0$. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

b) Vérifier que pour tout $t \in]0, +\infty[$, $f t = t f' t - t$.

Montrer alors que $v_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^{n+1} e^t f' t dt - u_{n+1}$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(n+2) v_n = \frac{e^e}{e^{n+2}} - v_{n+1} - u_{n+1}$.

d) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2) v_n = 0$.

3) a) Montrer qu'il existe un seul réel α_n appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1 \right]$ tel que $f \alpha_n = \frac{v_n}{u_n}$.

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$.

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

Exercice 4 (5 points)

A) Soit q un entier naturel.

1) Montrer que q^2 est impair si et seulement si q est impair.

2) Montrer que si q est impair alors $q^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

B) On se propose de déterminer l'ensemble **A** des triplets d'entiers naturels non nuls (m, n, q) tels que $2^{2m} + 3^{2n} = q^2$.

1) Vérifier que le triplet $(2, 1, 5)$ est un élément de **A**.

Dans la suite de l'exercice on suppose que (m, n, q) est un élément de **A.**

2) a) Montrer que q est impair.

b) Montrer que $q^2 - 3^{2n} \equiv 0 \pmod{8}$.

c) Montrer alors que m est différent de 1.

3) On suppose que $m \geq 2$.

a) Justifier que les entiers $q-3^n$ et $q+3^n$ sont pairs.

b) Soit $d = q-3^n \wedge q+3^n$.

Montrer que d divise $2q$ et que d divise 2^{2m} . En déduire que $d=2$.

c) Montrer que $q-3^n=2$ et que $q+3^n=2^{2m-1}$.

En déduire que $q=2^{2m-2}+1$ et que $3^n=2^{2m-2}-1$.

4) Déterminer n et q lorsque $m=2$.

5) On suppose que $m \geq 3$.

a) Montrer que $3^n \equiv -1 \pmod{16}$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel k , les restes possibles de 3^k dans la division euclidienne par 16.

c) En déduire qu'il n'existe pas de triplets (m,n,q) éléments de l'ensemble A tels que $m \geq 3$.

6) Déterminer l'ensemble A .

Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants
.....
.....



Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques - Session principale - 2018
Annexe à rendre avec la copie

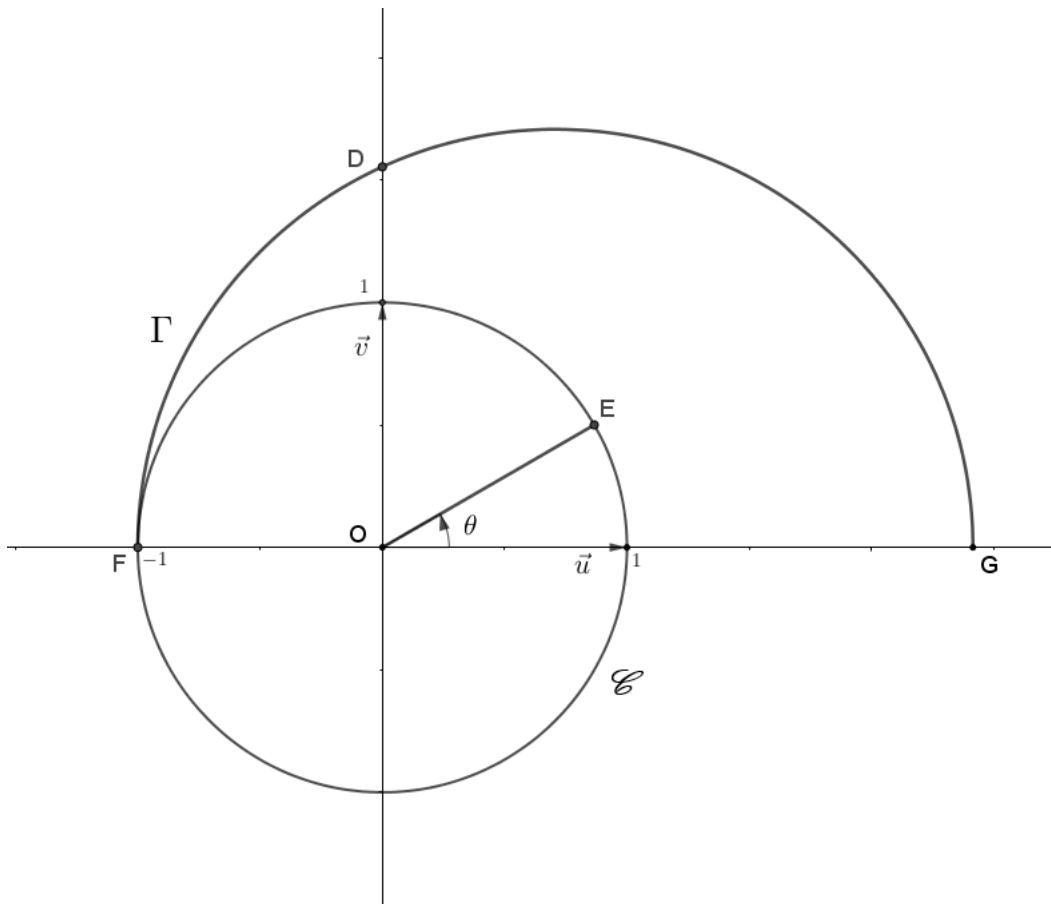


Figure 1

Ne rien écrire ici

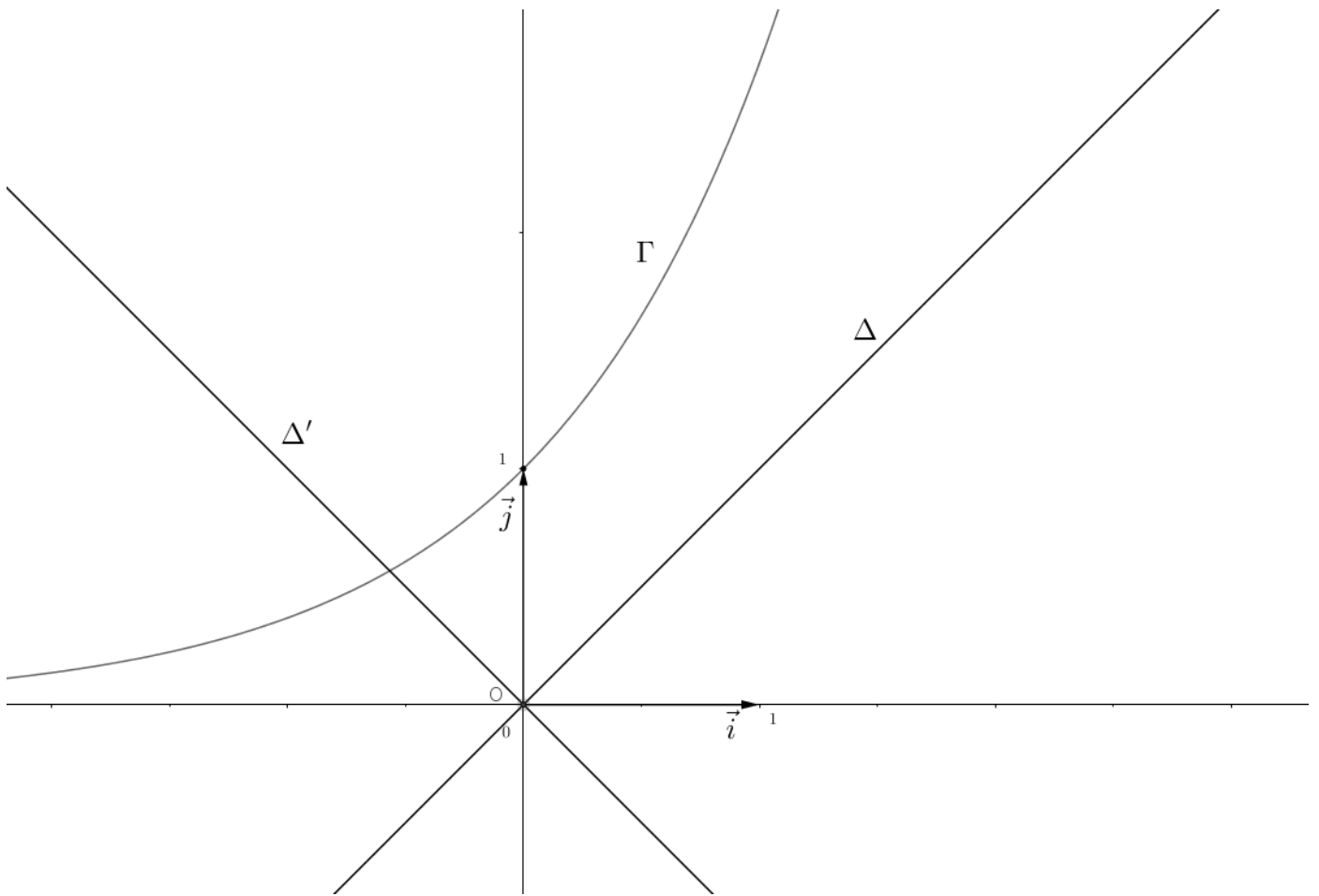


Figure 2