MATHS

Section : Sport

2ème Session

EXERCICE 1

Lors d'un jeu de tir au but, huit joueurs de football : « 2 attaquants, 3 "milieu de terrain" et 3 défenseurs » se sont présentés pour tirer des pénaltys.

Une épreuve consiste à choisir simultanément et au hasard une formation de 5 joueurs parmi les huit.

1°) Déterminer le nombre de formations possibles.

2°) Déterminer les probabilités des événements suivants :

A : « Un seul défenseur est présent dans la formation des 5 joueurs ».

B : « Aucun "milieu de terrain" n'est présent dans la formation des 5 joueurs ».

3°) Soit X l'aléa numérique qui à chaque formation choisie, on associe le nombre d'attaquants figurant dans cette formation.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

Contenu

- *Probabilité uniforme . Probabilité d'un événement.*
- *Variable aléatoire, loi de probabilité, espérance mathématique.*

Solutions et commentaires

1) Le nombre de formations possibles est égal à $C_8^5 = 56$.

2) $p(A) = \dfrac{C_3^1 x C_5^4}{56} = \dfrac{15}{56}$; $p(B) = \dfrac{C_5^5}{56} = \dfrac{1}{56}$.

3)

a)

x_i	0	1	2
p_i	$\dfrac{C_6^5}{56} = \dfrac{6}{56}$	$\dfrac{C_2^1 C_6^4}{56} = \dfrac{30}{56}$	$\dfrac{C_2^2 C_6^3}{56} = \dfrac{20}{56}$

b) E(X) = $0x\dfrac{6}{56} + 1x\dfrac{30}{56} + 2x\dfrac{20}{56} = \dfrac{70}{56} = \dfrac{5}{4}$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x - x$

1°) a) Calculer $f(0)$, $f(-1)$ et $f(\ln 2)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2°) a) Recopier et compléter le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f					

b) Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}, xe^{x} \geq x$.

3°) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = f'(x) - (e^{x} + x - 1)$.

c) Donner en fonction de x l'expression de la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Contenu

- *Calcul de la limite d'une fonction.*
- *Variation d'une fonction*
- *Détermination d'une primitive d'une fonction sur $\mathbb{R}$.*

Solutions et commentaires

1)

a) $f(0) = 0$; $f(-1) = 1 - e^{-1} = \dfrac{e-1}{e}$; $f(\ln 2) = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} - x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x} - x = \lim\limits_{x \to +\infty} x(e^{x} - 1) = +\infty$.

2) a)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) D'après ce qui précède , pour tout réel x ; $f(x) \geq 0$ d'où $xe^{x} \geq x$.

3)

a) $f'(x) = (x+1)e^{x} - 1$.

b) $f'(x) - (e^{x} + x - 1) = (x+1)e^{x} - 1 - e^{x} - x + 1 = xe^{x} - x = f(x)$

c) Soit F la primitive de f sur IR qui s'annule en 0.

On sait que pour tout réel x ; $f(x) = f'(x) - (e^{x} + x - 1)$ d'où F(x) = f(x) $-(e^{x} + \frac{1}{2}x^{2} - x)$ + k (où k est une constante) .

F(0) = 0 donc k = 1 et par conséquent F(x) = f(x) $-(e^{x} + \frac{1}{2}x^{2} - x)$ +1 = $(x-1)e^{x} - \frac{1}{2}x^{2} + 1$

PROBLEME

Dans la feuille jointe, la courbe (ζ) est la représentation graphique, dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'une fonction g définie et dérivable sur $]1,+\infty[$.

- Les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=0$, sont deux asymptotes à la courbe (ζ)
- La courbe (ζ) coupe la droite Δ d'équation $y=x$, en un point A d'abscisse β.

I) 1°) Par une lecture graphique, donner :

a) Les coordonnées du point A en fonction de β.

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

c) Le tableau de variation de g.

2°) a) Montrer que g est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

b) Tracer selon le même repère la courbe (ζ') représentative de g^{-1} où g^{-1} est la fonction réciproque de g.

II) On admet que la fonction G : $x\mapsto \ln(x-1)$ est une primitive de g sur $]1,+\infty[$.

1°) Calculer G(2).

2°) Soit a un réel donné tel que $a>3$. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine du plan limité par la courbe (ζ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=2$ et $x=a$.

a) Vérifier que $\mathcal{A}=\ln(a-1)$ en unités d'aire.

b) Déterminer le réel a pour que $\mathcal{A}=1$.

Contenu

- *Lecture graphique.*
- *Variation d'une fonction*
- *Détermination d'une primitive d'une fonction sur* $\mathbb{R}$.

Solutions et commentaires

1°) Par lecture graphique :

a) $A(\beta,\beta)$.

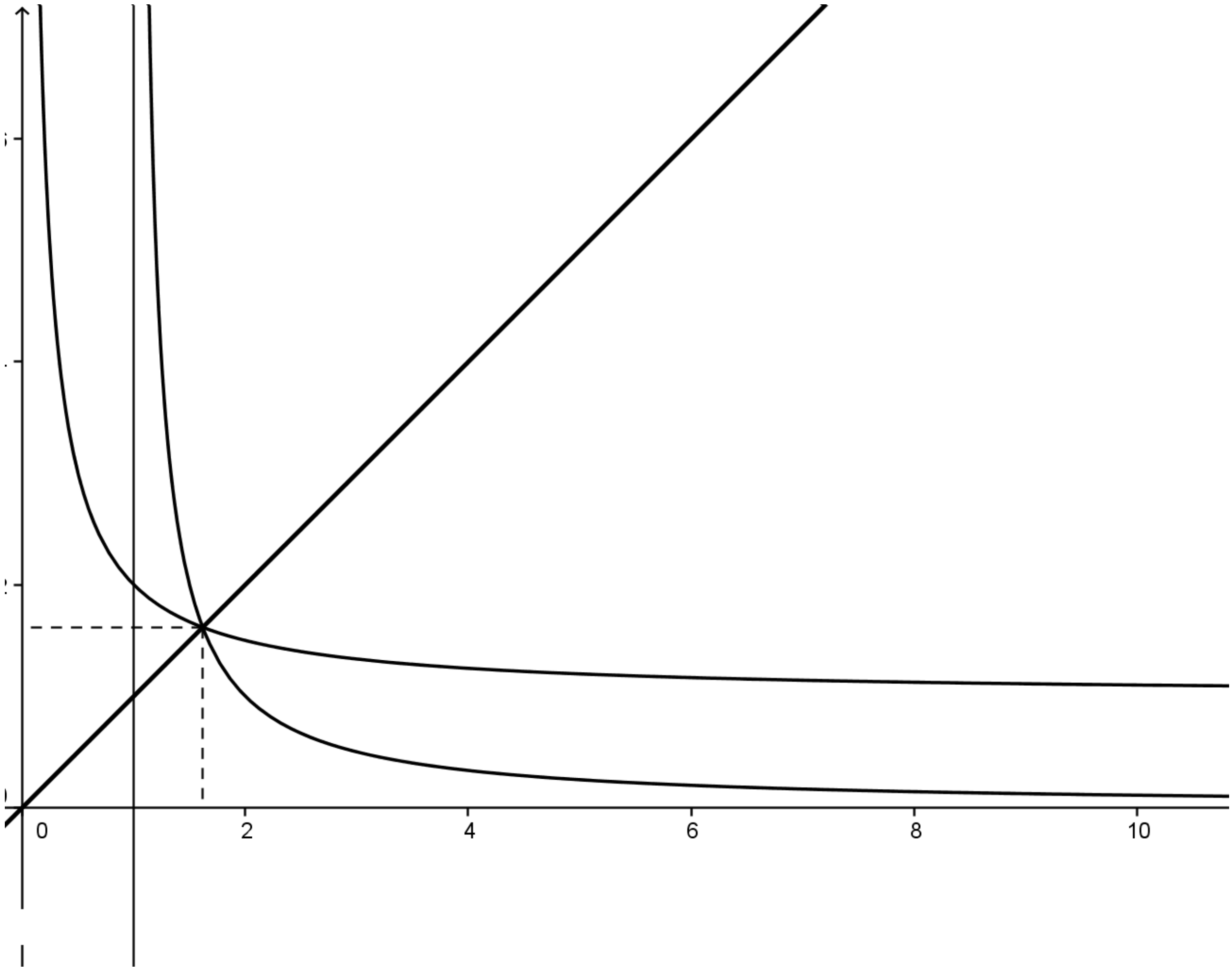
b) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=1$.

c)

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
g	$+\infty$ $\searrow$ 0

2) a) la fonction g est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ donc g est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

b) Courbe de g^{-1}



II –

1) G(2) = 0

2) La fonction g est continue et positive sur $]1,+\infty[$. L'aire $\mathcal{A}$ est égale à G(a) – G(2) = ln(a-1).

3) Si $\mathcal{A}$ = 1 alors ln(a-1) = 1 soit a- 1 = e soit a = 1+ e