***Section: Sciences de l'informatique*** ***Session principale 2011***

***Matière : Mathématiques***

**<u>Exercice 1</u> (4 points)**

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes - géométrie
- ✓ **Aptitudes visées :** Représenter un point connaissant son affixe, déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes, connaitre la nature d'un triangle.
- ✓ **Corrigé :**

1- a) $i^3 + i.i^2 - 2i + 4i = -i - i - 2i + 4i = 0$ donc i est une solution de ( E ) .

b) Comme i est une solution de ( E ) alors on peut écrire :

$z^3 + iz^2 - 2z + 4i = (z - i)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b - i)z^2 + (c - ib)z - ic$

Par identification ,on obtient $\begin{cases} b - i = i \\ c - ib = -2 \\ -ic = 4\square \end{cases}$ d'où $b = 2i$ et $c = -4$ .

Par suite $z^3 + iz^2 - 2z + 4i = (z - i)(z^2 + 2iz - 4)$

2- a) $(z - i)(z^2 + 2iz - 4) = 0$ signifie $z = i$ ou $z^2 + 2iz - 4 = 0$ .

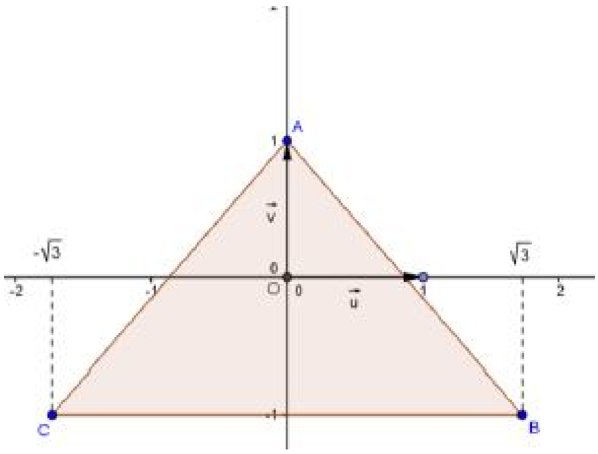
Or $z^2 + 2iz - 4 = 0$ . $a=1$ , $b= 2i=2b'$ signifie $b'=i$ et $c=-4$

Donc $\Delta' = b'^2 - ac = 3$ d'où $z' = -i + \sqrt{3}$ et $z'' = -i - \sqrt{3}$

Conclusion : $S_C = \{ i ; -i + \sqrt{3} ; -i - \sqrt{3} \}$ .

b) Question hors programme. (non notée)

3- a)




b) $AB = |z_B - z_A| = |-i + \sqrt{3} - i| = |\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}.$

$AC = |z_C - z_A| = |-i - \sqrt{3} - i| = |-\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}.$

Ainsi AB = AC donc ABC est un triangle isocèle de sommet principale A.

**Exercice 2** **(5,5 points)**

- ✓ **Contenu :** Déterminant d'une matrice d'ordre3, inverse d'une matrice d'ordre3, système linéaire $3\times 3$.
- ✓ **Aptitudes visées :** Modéliser une situation par un système linéaire, calculer le déterminant d'une matrice d'ordre3, reconnaitre l'inverse d'une matrice d'ordre3, résoudre un système linéaire $3\times 3$.
- ✓ **Corrigé :**

1- ( S ) : $\begin{cases} x+2y+3z=3200 \\ 4x+2y+5z=4600 \\ 3□+y+3z=2700 \end{cases}$

2- a) det ( A ) = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 - 12 + 12 = 1 \neq 0$ donc A est inversible .

$A\times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 7 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ donc $A^{-1} = B$

b) Le système ( S ) équivaut à AU= V avec U=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ □ \end{pmatrix}$ et V=$\begin{pmatrix} 3200 \\ 4600 \\ 2700 \end{pmatrix}$

Par suite AU= V signifie $U= A^{-1}V$ signifie U=BV signifie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 7 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3200 \\ 4600 \\ 2700 \end{pmatrix}$$

D'où x = 200 dinars ; y = 900 dinars et z = 400 dinars .

**Exercice 3** **(4,5 points)**

- ✓ **Contenu :** Arithmétique.
- ✓ **Aptitudes visées :** Modéliser une situation par une équation du type ax + by = c, connaitre et utiliser les propriétés de la divisibilité dans Z, calculer le pgcd de deux entiers, reconnaitre que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans $Z^2$, des équations du type ax + by = c.
- ✓ **Corrigé :**

1- a) Si ( x , y ) est solution de ( E ) alors 8x + 5y = 100 signifie 8x=100-5y=5(20-y) ce qui donne que 5 divise 8x et comme $5\wedge 8=1$ donc d'après le théorème de Gauss 5 divise x c'est-à-dire x est un multiple de 5.

b) D'après a) si ( x , y ) est solution de ( E ) alors x est multiple de 5 donc $x = 5k$ , $k \in Z$ on remplace x dans l'équation( E )on obtient $8\times 5k + 5y = 100$ signifie $8k + y = 20$ d'où $y = 20 - 8k$ , $k \in Z$ .

Réciproquement, pour tout $k \in Z$ le couple ( x , y )= (5k , 20 – 8k) vérifier l'équation( E )

Conclusion $S_{Z\times Z} = \{(5k , 20 - 8k) ;\ k \in Z\}$ .

2- soit x le nombre de lycéens et y le nombre de collégiens.
Les composantes possibles de ce groupe vérifier l'équation ( E ) : $8x + 5y = 100$ donc d'après 1) $( x , y ) = \{( 5k , 20 – 8k ) , k \in \mathbb{Z}$.

Or $x \geq 0$ et $y \geq 0$ donc $5k > 0$ et $20 – 8k \geq 0$ ce qui donne $k > 0$ et $k \leq \frac{20}{8}$
Ainsi $k \in \{ 1 , 2 \}$ .
Conclusion : $( x , y ) \in \{ ( 5 , 12 ) ; ( 10 , 4 ) \}$ .

**Exercice 4 (6 points)**

- **Contenu :** Fonctions numériques ; limites, continuité, dérivabilité, variation, tangente à une courbe en un point, courbe, calcul d'aire.
- **Aptitudes visées :** Lire un tableau de variation d'une fonction, déterminer les limites d'une fonction, déterminer la dérivée d'une fonction , déterminer le sens de variation d'une fonction , reconnaitre une équation de la tangente à une courbe en un point, identifier les branches infinies d'une courbe, tracer une courbe, calculer l'aire d'une partie du plan.
- **Corrigé :**

1- a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f ( x ) = - \infty$ .

b ) $A ( 1 , 1 ) \in C$ signifie $f ( 1 ) = 1$
$T : y = x$ est la tangente à C au point A ( 1 , 1 ) donc $f ' ( 1 ) = 1$ .

2- a) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f ( x ) - f ( 0 )}{x - 0} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{f ( x )}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} x( 1 - \ln x ) = \lim\limits_{x\to0^+} (x - x\ln x) = 0.$

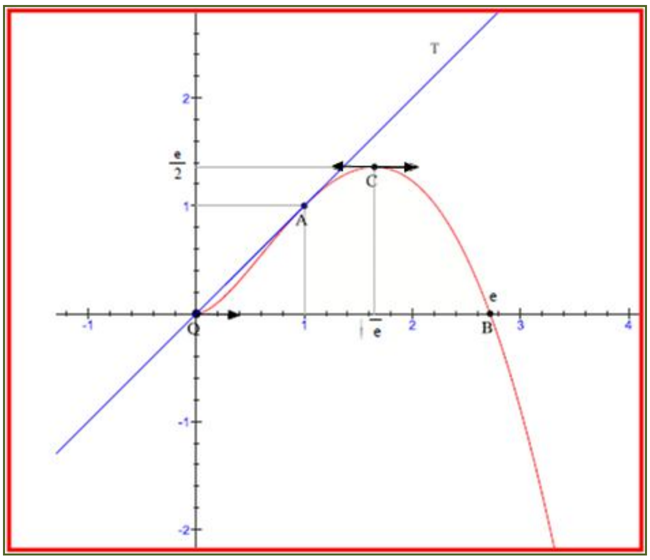
Ainsi f est dérivable à droite en 0 et $f'_d( 0 ) = 0$ et par suite C admet une demi tangente horizontale à dirigée à droite au point O .

b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f ( x )}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x( 1 - \ln x ) = -\infty.$

donc C admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$ .

c) $f ( x ) = 0$ signifie $x = 0$ ou $( 1 – \ln x ) = 0$ signifie $x = 0$ ou $\ln x = 1$ signifie $x = 0$ ou $x = e$ .
Conclusion : $C \cap ( Ox ) = \{ O( 0 , 0 ) ; B( e , 0 ) \}$ .

d)



3- A = = .

A l'aide d'une intégration par partie , on pose : $u(x) = 1 - \ln x$ et $v'(x) = x^2$

donc $u'(x) = -\frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{3}x^3$ , ce qui donne :

$A = \left[\frac{1}{3}x^3(1 - \ln x)\right]_1^e + \frac{1}{3}\int_1^e x^2 \square x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e = \frac{e^3 - 4}{9}$ ( u.a ) .